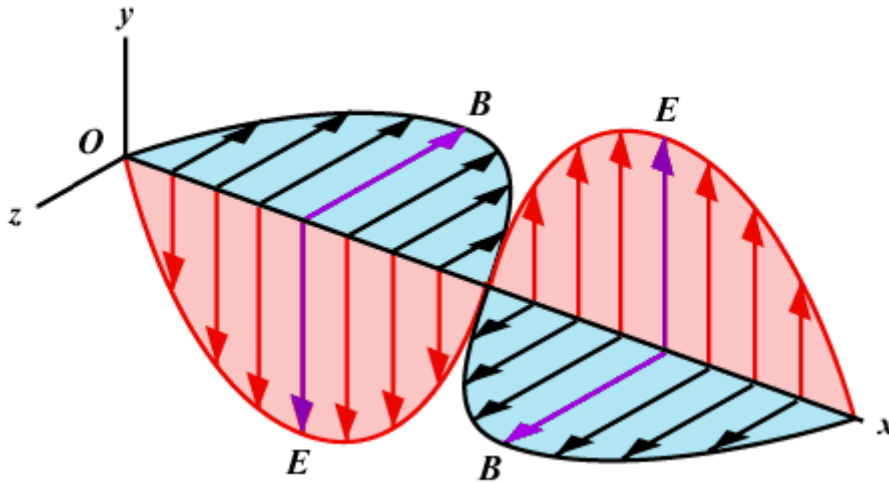


Onde Elettromagnetiche



Questa sezione della didattica è dedicata alle onde elettromagnetiche. Per prima cosa viene dimostrato che la luce è un'onda elettromagnetica partendo dalle equazioni fondamentali del magnetismo, successivamente viene messo in evidenza il legame inscindibile vigente tra campo elettrico e campo magnetico per poi concludere con l'introduzione del vettore di Poynting.

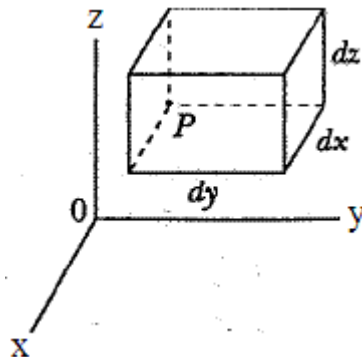
Immagini e testi a cura di **Michele Calia**

Equazioni di Maxwell

Partendo dalle seguenti equazioni, Maxwell tirò fuori le onde elettromagnetiche fino a dimostrare che la luce è un'onda EM.

$\epsilon_0 \int E \, da = q$	Legge di Gauss per il campo elettrico
$\int B \, da = 0$	Legge di Gauss per il campo magnetico
$\int E \, ds = - \frac{d\phi_B}{dt}$	Legge di induzione di Faraday
$\int B \, ds = \mu_0 (i + \frac{d\phi_E}{dt})$	Legge di Ampere Maxwell

Queste quattro equazioni viste attentamente sono a due a due simmetriche tra di loro, in quanto le prime due sono integrali di superficie rispettivamente del campo elettrico e magnetico, le seconde due sono integrali di linea del campo elettrico e magnetico. Un po' di asimmetria è presente nei secondi membri perché guardando la legge di Gauss per il campo magnetico questo è pari a zero, bensì è giustificato dal fatto che non esistono monopoli magnetici come per le cariche elettriche, come ci viene mostrato da Gauss per il campo elettrico. Per quanto riguarda la legge di Ampere Maxwell, questa mostra una corrente "i" che è assente nella legge di Faraday, tuttavia in quest'ultima non ci potrebbero essere correnti dovute a cariche magnetiche. Tramite queste semplici considerazioni otteniamo una precisa simmetria. Per ottenere le equazioni di Maxwell in forma differenziale partiamo dalla legge di Gauss per il campo elettrico. Applicando la seguente $\epsilon_0 \int E \, da = q$ ad un elemento infinitesimo di volume a forma di parallelepipedo rettangolo nel quale vi è un punto "P" in cui è presente un campo elettrico, ovvero trovandoci nella seguente situazione:



Il vettore superficie A per la faccia posteriore è:

$$dA = -i \, dy \, dz$$

il meno è dovuto al fatto che "da" è scelto come normale verso l'esterno, per la faccia anteriore si ha

$$da = i \, dy \, dz$$

Se il campo elettrico vale "E" per la faccia posteriore, per quella anteriore è pari a "E + dE/dx * dx" poiché c'è una variazione di "E" lungo x. Per cui il contributo del flusso per la faccia anteriore è posteriore è :

$$\begin{aligned} & (E)(-i \, dy \, dz) + (E + dE/dx * dx)(i \, dy \, dz) = \\ & = -Ei \, dy \, dz + Ei \, dy \, dz + dEi/dx * dx \, dy \, dz = \\ & = dx \, dy \, dz(dEx/dx) \end{aligned}$$

Generalizzando il calcolo su tutto il volume e mettendo in evidenza dx dy dz otteniamo

$$dx \, dy \, dz(dEx/dx + dEy/dy + dEz/dz)$$

applicando gli operatori differenziali si ha

$$dx \, dy \, dz \, \text{div } E$$

che rappresenta il primo membro della legge di Gauss per il campo elettrico. Il secondo membro lo si ricava in questo modo:

sapendo che "q/ε0" è la carica racchiusa nel volume, si può ragionare in termini di densità utilizzando la seguente equazione:

$$q = \int \rho \, dV$$

che per un elemento infinitesimo di volume si riduce a

$$q = \rho \, dx \, dy \, dz$$

infine uguagliando il primo e il secondo membro ottenuti si ha:

$$\epsilon_0 \, dx \, dy \, dz \, \text{div } E = \rho \, dx \, dy \, dz$$

semplificando

$$\begin{array}{ll} \epsilon_0 \, \text{div } E & \text{Legge di Gauss} \\ = \rho & \text{elettricit\`a} \end{array}$$

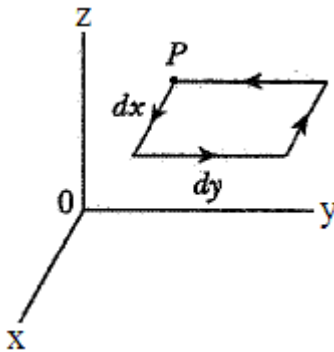
Allo stesso modo si dimostra che:

$$\begin{array}{ll} \text{div } B & \text{Legge di Gauss} \\ = 0 & \text{magnetismo} \end{array}$$

In questo modo si sono ottenute le prime due equazioni. Per ricavare la terza e la quarta in forma differenziale, questa volta si prende la legge di Ampere-Maxwell:

$$\int B \, ds = \mu_0 (i + d\Phi_E / dt)$$

Trovandoci in questa condizione:



Dove "B" è il campo magnetico in "P". Il primo membro è pari alle seguenti quantità:

$B(jdy)$	linea posteriore
$B(idx)$	linea sinistra
$(B + dB/dx * dx)(-jdy)$	linea anteriore
$(B + dB/dy * dy)(-idx)$	linea destra

Che vanno sommate:

$$B(jdy) + B(idx) + (B + dB/dx * dx)(-jdy) + (B + dB/dy * dy)(-idx) =$$

$$= Bjdy + Bidx - Bjdy - dBj/dx * dx dy - Bidx - dBi/dy * dx dy =$$

Mettendo in evidenza dx dy

$$= dx dy (dBj/dx - dBi/dy) =$$

$$= dx dy (dBy/dx - dBx/dy)$$

Applicando gli operatori differenziali si ha

$$dx dy \operatorname{rot} B$$

Il secondo membro è pari a:

$$\mu_0 (i + d\Phi_E / dt)$$

dove

$$i = J dA$$

con "J" densità di corrente e "dA = z dx dy" vettore superficie, ottenendo:

$$i = J(z dx dy) =$$

$$= Jz dx dy$$

Per quanto riguarda

$$d\Phi_E / dt$$

lo si può scrivere come

$$\begin{aligned} dE \, dA / dt &= \\ &= dE_z \, dx \, dy / dt \end{aligned}$$

Mettendo in evidenza $dx \, dy$ si ottiene:

$$\mu_0 dx \, dy (J_z + dE_z / dt)$$

infine uguagliando il primo e il secondo membro ottenuti si ha:

$$dx \, dy \, \text{rot } B = \mu_0 dx \, dy (J_z + dE_z / dt)$$

$$\text{rot } B = \mu_0 (J_z + \text{Legge di Ampere} \\ dE_z / dt) \quad \text{Maxwell}$$

Allo stesso modo si dimostra che

$$\text{rot } E = - \text{Legge di induzione di} \\ dB/dt \quad \text{Faraday}$$

La scrittura in forma differenziale è la seguente:

$$\bar{\nabla} \cdot E = \rho / \epsilon_0$$

$$\bar{\nabla} \cdot B = 0$$

$$\bar{\nabla} \times E = - \underline{dB/dt}$$

$$\bar{\nabla} \times B = \mu_0 (J + \underline{dE / dt})$$

Dalla teoria di Maxwell emerge che tutte le onde elettromagnetiche hanno proprietà comuni, infatti si possono descrivere tutte in termini di campi "E" e "B", tutte si propagano con la stessa velocità ed hanno tutte uguale forma e descrizione matematica. La generazione delle onde elettromagnetiche (oltre a quelle presenti in natura) avviene tramite circuiti oscillanti i quali non vengono trattati in quanto il lettore dovrebbe avere nozioni di elettrotecnica.

Onde EM ed equazioni di Maxwell

Tramite ragionamenti sull'elettromagnetismo Maxwell dimostrò che la velocità delle onde EM nello spazio vuoto è uguale a "c" (velocità della luce), ossia la luce è un'onda EM. Matematicamente siccome l'onda ha una forma sinusoidale i due campi "E" e "B" si scrivono come:

$$E = E_m \sin(Kx - \omega t) \text{ e } B = B_m \sin(Kx - \omega t)$$

"Dove "ω" è la pulsazione del dipolo oscillante e "K" è il numero d'onda. Per cui se un'onda si propaga alla velocità della luce allora "ω" e "K" sono legate dalla relazione:

$$c = \omega / K$$

per quanto riguarda ω:

$$\omega = 2\pi f$$

con

$$f = c / \lambda$$

quindi

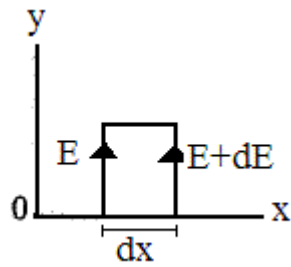
$$\omega = 2\pi c / \lambda$$

per quanto riguarda K:

$$K = 2\pi / \lambda$$

Facendo il rapporto tra ω e K, sostituendo le grandezze sopra elencate si ottiene "c".

Andando a valutare il campo elettrico di un'onda ci troviamo nella seguente situazione:



Applicando

$$\int E \, ds = - d\Phi_B / dt$$

e facendo la circuitazione, il primo membro di questa sarà pari a:

$$\begin{aligned} (E + dE)h - Eh &= \\ = Eh + dEh - Eh &= \\ &= dEh \end{aligned}$$

Il secondo membro sarà pari a:

$$\Phi_B = (B)(dxh)$$

derivando rispetto al tempo si ha:

$$- d\Phi_B/dt = h \, dx \, dB/dt$$

infine uguagliando il primo e il secondo membro ottenuti si ha:

$$dEh = - h \, dx \, dB/dt$$

semplificando e dividendo primo e secondo membro per dx si ha:

$$dE/dx = - dB/dt$$

poiché E e B sono note, andandole a calcolare le derivate si ha:

$$KE_m \cos(Kx - \omega t) = \omega B_m \cos(Kx - \omega t)$$

semplificando

$$KE_m = \omega B_m$$

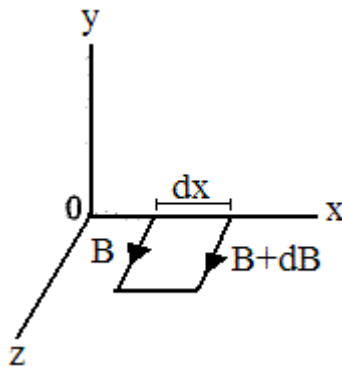
Siccome

$$\omega/K = c$$

anche

$$E/B = c$$

Questo è un importantissimo risultato. Il successivo risultato che si dimostra nelle righe seguenti è di fondamentale importanza perché si ottiene la velocità della luce da considerazioni elettromagnetiche. Andando a valutare il campo magnetico di un'onda ci troviamo nella seguente situazione:



Applicando $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 d\Phi E / dt$ (nel secondo membro vi è un termine mancante poiché non vi è corrente di conduzione in un'onda EM, ma solo di drift) e facendo la circuitazione, il primo membro di questa sarà pari a quanto segue:

$$\begin{aligned} & -(B + dB)h + Bh = \\ & = -Bh - dBh + Bh = \\ & = -dBh \end{aligned}$$

Il secondo membro sarà pari a:

$$\Phi_E = (E)(dxh)$$

derivando rispetto al tempo si ha:

$$- d\Phi_E/dt = h dx dE/dt$$

infine uguagliando il primo e il secondo membro ottenuti si ha:

$$- dBh = \mu_0 \epsilon_0 h dx dE/dt$$

semplificando e dividendo primo e secondo membro per dx si ha:

$$- dB/dx = \mu_0 \epsilon_0 dE/dt$$

poiché E e B sono note, andandole a calcolare le derivate si ha:

$$-KB_m \cos(Kx - \omega t) = -\mu_0 \epsilon_0 \omega E_m \cos(Kx - \omega t)$$

semplificando

$$-KB_m = -\mu_0 \epsilon_0 \omega E_m$$

Dividendo primo e secondo membro per B_m si ottiene:

$$c = K / \mu_0 \epsilon_0 \omega$$

dove al secondo membro il rapporto

$$K / \omega = 1 / c$$

vale a dire che in fine si ha l'asserto che si voleva dimostrare

$$c^2 = 1 / \mu_0 \epsilon_0$$

Vettore di Poynting e relazioni fondamentali

Il vettore di poynting “ $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ” per definizione è il prodotto vettoriale tra il campo elettrico ed il campo magnetico, dove “E” e “B” sono i campi in un certo punto dello spazio ed “S” è il vettore in quel punto dello spazio. Da questo si evince che il **vettore di Poynting** ha la stessa direzione di propagazione dell’onda elettromagnetica. In oltre misura l’intensità ed il flusso di energia per unità di tempo superficie di un’onda:

$$S = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/\mu_0 \quad [\text{W/m}^2]$$

Sapendo che $c = E/B$ si può scrivere anche:

$$S = E^2/\mu_0 c$$

oppure

$$S = B^2 c/\mu_0$$

Questi risultati sono in accordo con la densità di energia per unità di volume che per il campo elettrico è pari a:

$$U_E = \epsilon_0 E^2/2$$

Per il campo magnetico:

$$U_B = B^2/2\mu_0$$

Per cui la densità di energia di un onda elettromagnetica è pari a:

$$U = U_E + U_B = 1/2 (\epsilon_0 E^2 + B^2/\mu_0)$$

Sapendo che “ $B = E/c$ ” dalla relazione “ $c = E/B$ ” si può riscrivere in questo modo:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + E^2 / \mu_0 c^2) = \\
& = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + E^2 \mu_0 \epsilon_0 / \mu_0) = \\
& = \frac{1}{2} (2 \epsilon_0 E^2) = \\
& = \epsilon_0 E^2
\end{aligned}$$

Viceversa se si sostituisce "E = c B" si ottiene:

$$U = B^2 / \mu_0$$

L'intensità di un onda si può ottenere dalle seguenti relazioni:

$$I = P/S$$

oppure

$$I = U c$$

Dove "P" è la potenza e "S" è la superficie su cui incide. L'intensità media è pari a:

$$I_m = (E_m B_m) / 2\mu_0$$

La pressione di radiazione di un onda è pari a:

$$P_r = S/c$$

o invece per una superficie completamente riflettente

$$P_r = 2S/c$$